ΘΕΜΑ 2

(Μεταβατικά Φαινόμενα – Κύκλωμα δεύτερης τάξης – Διαφορική εξίσωση)

Στο κύκλωμα του σχήματος ο διακόπτης του σχήματος δ βρίσκεται για άπειρο (πολύ μεγάλο) χρόνο στην θέση α. Τη χρονική στιγμή t=0 ο διακόπτης μετατίθεται στην θέση b.

Δίνονται : R=1Ω

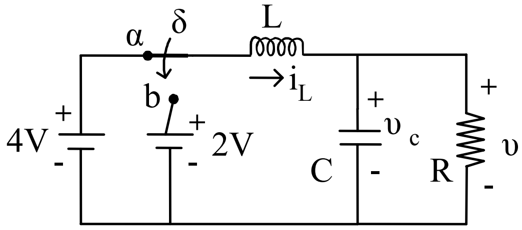
L=1H, C=0,16F

Ζητούνται :

α) Οι τιμές $i_L(0^-)$, $\upsilon_C(0^-)$

β) Η διαφορική εξίσωση με άγνωστο την τάση υ στα άκρα της αντίστασης R για t>0

γ) Η λύση της διαφορικής εξίσωσης, δηλαδή η απόκριση για t>0



Υποδειγματική Λύση

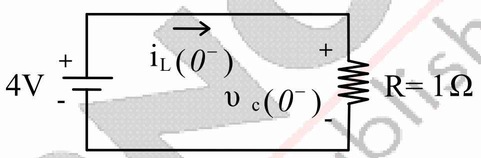
α) Για t<0 η πηγή 4V είναι συνδεδεμένη στο κύκλωμα, ενώ η πηγή 2V είναι εκτός. Επειδή όμως η πηγή συνεχούς τάσης 4V είναι για άπειρο (πολύ μεγάλο) χρόνο συνδεδεμένη στο κύκλωμα, το πηνίο συμπεριφέρεται ως βραχυκύκλωμα (καλώδιο) και ο πυκνωτής ως ανοικτό κύκλωμα (διακόπτης ανοικτός). Αυτό γίνεται γιατί οι τάσεις και τα ρεύματα έχουν σταθεροποιηθεί. Συνεπώς :

$$\upsilon_L = L\frac{di_L}{dt} = 0 \quad \text{και} \quad i_C = C\frac{d\upsilon_C}{dt} = 0$$

Έτσι για $t = 0^+$ έχουμε το ισοδύναμο κύκλωμα του διπλανού σχήματος.

Προκύπτει λοιπόν ότι :

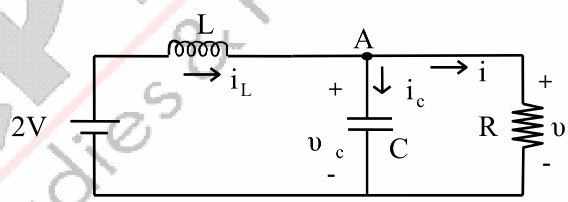
$i_L(0^-) = 4A$ και $\upsilon_C(0^-) = 4V$



β) Για t>O ο διακόπτης δ βρίσκεται στην θέση (b).

Τώρα έχουμε το ακόλουθο ισοδύναμο κύκλωμα:

Η πηγή συνεχούς τάσης 2V δεν είναι τώρα για άπειρο χρόνο συνδεδεμένη στο κύκλωμα. Έτσι το πηνίο L και ο πυκνωτής C λειτουργούν κανονικά.



Αντικαθιστούμε το πηνίο με την σύνθετη αντίσταση LD και τον πυκνωτή με τη σύνθετη αντίσταση $1/CD$

Η τάση στα άκρα του παράλληλου συνδυασμού R και C είναι υ. Επομένως από τον διαιρέτη τάσης έχουμε :

$$\upsilon = \frac{\dfrac{R\dfrac{1}{CD_0}}{R+\dfrac{1}{CD}}}{\dfrac{R\dfrac{1}{CD}}{R+\dfrac{1}{CD}}+LD}\cdot 2 \quad \Rightarrow \quad \upsilon = 2\frac{R}{R+LD(RCD+1)}$$

Με αντικατάσταση των αριθμητικών δεδομένων R=1Ω, L=1H και C=0,16F παίρνουμε :

$$\upsilon = 2\frac{1}{1+D(0,16D+1)} \quad \Rightarrow \quad (0.16D^2+D+1)\upsilon = 2 \qquad (1)$$

Πρέπει να προσδιοριστούν τώρα οι αρχικές συνθήκες για την λύση της διαφορικής εξίσωσης (1), δηλαδή οι τιμές $\upsilon(0^+)$, $D\upsilon(0^+)$

Παρατηρούμε ότι για t>0 είναι $\upsilon = \upsilon_c$

Άρα $\upsilon(0^+) = \upsilon_c(0^+) = \upsilon_c(0^-) = 4V$

Επίσης είναι $i_L(0^+) = i_L(0^-) = 4A$

Ο νόμος ρευμάτων Kirohhoff στον κόμβο A δίνει :

$i_L = i_C + i$ (2)

Όμως $i_C = CD\upsilon_C = CD\upsilon$ (3) (αφού $\upsilon = \upsilon_C$)

και $i = \frac{\upsilon}{R}$ (4)

Οπότε (2) $\overset{(3)\cap(4)}{\Rightarrow}$ $i_L = CD\upsilon + \frac{\upsilon}{R} \Rightarrow i_L(0^+) = CD\upsilon(0^+) + \frac{\upsilon(0^+)}{R}$

Από την τελευταία εξίσωση για $i_L(0^+) = 4A$ και $\upsilon_C(0^+) = 4V$ παίρνουμε :

$$4 = 0{,}16\, D\upsilon(0^+) + 4 \Rightarrow D\upsilon(0^+) = 0$$

Συνεπώς έχουμε τη διαφορική εξίσωση : $0{,}16\, D^2\upsilon + D\upsilon + \upsilon = 2$ (5)

με αρχικές συνθήκες $\upsilon(0^+) = 4, \quad D\upsilon(0^+) = 0$

γ) Για να λύσουμε τη διαφορική εξίσωση (5) με τις αρχικές συνθήκες που βρήκαμε στο προηγούμενο ερώτημα , θεωρούμε αρχικά την αντίστοιχη ομογενή εξίσωση η οποία έχει χαρακτηριστική αλγεβρική :

$$0{,}16\lambda^2 + \lambda + 1 = 0 \Rightarrow (\lambda = -1{,}25 \;\; ή \;\; \lambda = -5)$$

Έτσι η λύση της αντίστοιχης ομογενούς είναι :

$\upsilon_{ομ}(t) = k_1 e^{-1{,}25t} + k_2 e^{-5t}$ όπου k_1, k_2 αυθαίρετες σταθερές.

Επειδή το δεύτερο μέλος της διαφορικής εξίσωσης είναι σταθερό, δοκιμάζουμε ως μερική λύση μία σταθερά $\upsilon_{μερ} = p$

Θα είναι τότε (πρέπει η p να επαληθεύει την εξίσωση):

$$0{,}16 \frac{d^2 p}{dt^2} + \frac{dp}{dt} + p = 2 \Rightarrow p = 2$$

Αφού $\upsilon_{μερ} = 2$ η γενική λύση γράφεται :

$$\upsilon(t) = \upsilon_{ομ} + \upsilon_{μερ} = k_1 e^{-1{,}25t} + k_2 e^{-5t} + 2$$

Εφαρμόζουμε τώρα τις αρχικές συνθήκες :

$$\upsilon(0^+) = 4 \Rightarrow k_1 e^{-0} + k_2 e^{-0} + 2 = 4 \Rightarrow k_1 + k_2 = 4 \qquad (6)$$

$$D\upsilon(0+) = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt}\left[k_1 e^{-1{,}25t} + k_2 e^{-5t}\right]_{t=0} = 0 \Rightarrow \left(-1{,}25 k_1 e^{-1{,}25t} - 5k_2 e^{-5t}\right)_{t=0} = 0 \Rightarrow$$

$$-1{,}25k_1 - 5k_2 = 0 \qquad (7)$$

Από το σύστημα των εξισώσεων (6) και (7) βρίσκουμε :

$$k_1 = \frac{8}{3} \; και \; k_2 = -\frac{2}{3}$$

Συνεπώς η ζητούμενη απόκριση (για t>0) είναι :

$$\upsilon(t) = \frac{8}{3} e^{-1{,}25t} - \frac{2}{3} e^{-5t} + 2 \qquad (8)$$

ΑΣΚΗΣΗ ΑΠΟ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΤΩΝ ΗΛ/ΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΣΤΟ ΜΑΘΗΜΑ ¨ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΑ ΚΥΚΛΩΜΑΤΑ¨
ΑΚΑΔΗΜΑΪΚΟ ΕΤΟΣ 1995 - 1996

Λύτης: Βουδούκης Νικόλαος