ΑΣΚΗΣΗ 3
(Μεταβατικά Φαινόμενα – Κύκλωμα πρώτης τάξης – Διαφορική εξίσωση)

Δίνεται το κύκλωμα του σχήματος, θεωρώντας ως απόκριση το ρεύμα i(t).
Δίνονται επίσης :

$R = R_1 = R_2 = 1\Omega$

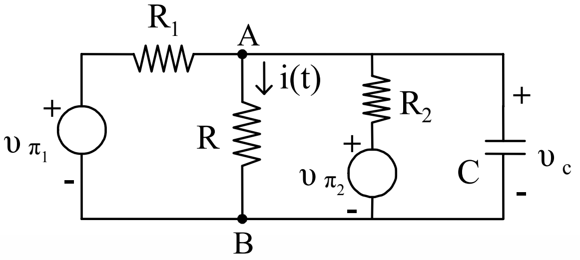
$C = 1F$

$\upsilon_C(0^-) = 1V$

$\upsilon_{\pi 1}(t) = 4u(t)$

$\upsilon_{\pi 2}(t) = 2u(t)$

όπου $u(t)$ η μοναδιαία βηματική απόκριση.



Να βρεθούν : α) Η διαφορική εξίσωση με άγνωστο i και να σχολιαστεί η τάξη της.
β) Οι αποκρίσεις Μηδενικής Εισόδου (Α.Μ.Ε), Μηδενικής κατάστασης (Α.Μ.Κ), Μόνιμη, Μεταβατική και η Πλήρης Απόκριση (Π.Α.)

Υποδειγματική Λύση

α) Είναι $\upsilon_{AB} = iR$ (1)

Η τάση υ_{AB} μπορεί να βρεθεί με εφαρμογή του θεωρήματος Millman μεταξύ των σημείων Α και Β. Έχουμε :

$$\frac{\frac{\upsilon_{\pi 1}}{R_1}+\frac{\upsilon_{\pi 2}}{R_2}}{\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\frac{1}{1/CD}+\frac{1}{R}} \overset{(1)}{\Rightarrow} iR = \frac{\frac{\upsilon_{\pi 1}}{R_1}+\frac{\upsilon_{\pi 2}}{R_2}}{\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\frac{1}{1/CD}+\frac{1}{R}} \Rightarrow$$

$$R\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R}+CD\right)i = \frac{\upsilon_{\pi 1}}{R_1}+\frac{\upsilon_{\pi 2}}{R_2} \Rightarrow RC\frac{di}{dt}+\left(\frac{R}{R_1}+\frac{R}{R_2}+1\right)i = \frac{\upsilon_{\pi 1}}{R_1}+\frac{\upsilon_{\pi 2}}{R_2} \quad (2)$$

Η σχέση (2) είναι η ζητούμενη διαφορική εξίσωση. Είναι πρώτης τάξης (παράγωγος πρώτης τάξης $\frac{d}{dt}$). Αυτό ήταν αναμενόμενο γιατί στο κύκλωμα υπάρχει μόνο ένα στοιχείο αποθήκευσης ενέργειας (ο πυκνωτής χωρητικότητας C).
Αν αντικαταστήσουμε τα αριθμητικά δεδομένα η διαφορική εξίσωση (2) γράφεται :

$$\frac{di}{dt}+3i=6u(t) \quad (3)$$

β) Στο κύκλωμα δεν υπάρχουν κρουστικές πηγές, ούτε βρόχος με πυκνωτές και πηγές τάσης μόνο, ούτε κόμβος στον οποίον να συνδέονται κλάδοι που περιέχουν μόνο πηνία ή πηγές έντασης. Συνεπώς θα είναι $\upsilon_C(0^+)=\upsilon_C(0^-)=1V$

Παρατηρούμε από το κύκλωμα ότι $iR=\upsilon$. Οπότε τη χρονική στιγμή $t=0^+$ θα είναι $i(0^+)R=\upsilon(0^+)\Rightarrow i(0^+)=1A$

Αυτή είναι η αρχική συνθήκη.
Για την εύρεση της Α.Μ.Ε θεωρούμε μηδενική είσοδο, δηλαδή παίρνουμε την αντίστοιχη ομογενή της (3).

Λύνουμε τώρα το πρόβλημα :

$$\frac{d_i}{d_t}+3i=0 \quad \mu\varepsilon \quad i(0^+)=1$$

Έχουμε $\lambda+3=0 \Rightarrow \lambda=-3 \quad \kappa\alpha\iota \quad i_{ME}(t)=ke^{\lambda t}=ke^{-3t}$

Όμως $i_{ME}(0_+)=ke^{-3\cdot 0}=1 \Rightarrow k=1$

Άρα τελικά $i_{ME}(t)=e^{-3t}$ (4)

Για να βρούμε την Α.Μ.Κ λύνουμε το πρόβλημα :

$$\frac{di}{dt}+3i=6 \quad \mu\varepsilon \quad i(0_+)=0$$

Η λύση της αντίστοιχης ομογενούς έχει μορφή k_1e^{-3t} και η μερική λύση της διαφορικής εξίσωσης είναι σταθερά, έστω p. Έτσι παίρνουμε :

$$\frac{dp}{dt}+3p=6 \Rightarrow 3p=6 \Rightarrow p=2$$

Οπότε $i_{MK}(t)=k_1e^{-3t}+2$

Θέτοντας $i_{MK}(0_+)=0 \quad \pi\rho o\kappa\acute{\upsilon}\pi\tau\varepsilon\iota \quad k_1=-2$

Άρα $i_{MK}=-2e^{-3t}+2$ (5)

Η πλήρης απόκριση είναι :

(Πλήρης απόκριση) = (Απόκριση Μηδενικής Εισόδου.) + (Απόκριση Μηδενικής Κατάστασης)

Συνεπώς :

$$i_{\Pi.A.}(t)=e^{-3t}-2e^{-3t}+2 \Rightarrow i_{\Pi.A.}(t)=-e^{-3t}+2 \qquad (6)$$

Η μόνιμη απόκριση προκύπτει από την πλήρη απόκριση για $t\to\infty$. Τότε $e^{-3t}\to 0$

Τελικά λοιπόν :

$$i_{MON.A.}(t)=2 \qquad (7)$$

Ισχύει (Μεταβατική Απόκριση) = (Πλήρης Απόκριση) – (Μόνιμη Απόκριση).

Άρα από τις (6) και (7) προκύπτει ότι :

$$i_{MET.A.}(t)=-e^{-3t} \qquad (8)$$

ΑΣΚΗΣΗ ΑΠΟ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΤΩΝ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΕΜΠ. ΣΤΟ ΜΑΘΗΜΑ ¨ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΑ ΚΥΚΛΩΜΑΤΑ¨
ΑΚΑΔΗΜΑΪΚΟ ΕΤΟΣ 1997 - 1998

Λύτης: Βουδούκης Νικόλαος